ユ-クリッド空間&{\rm R^n}&と複素ユ-クリッド&{\rm C^n}&における凸集合の&\sigma&凸性について(作用素の構造と関連する最近の話題)

AUTHOR(S):

Takemoto, Hideo; Uchiyama, Atsushi; Zsido, Laszlo

数理解析研究所講究録 1312 巻 2003 年 140-143

ユークリッド空間 R^n と 複素ユークリッド C^n における凸集合の σ 凸性について

宮城教育大学教育学部
武元　英夫　(Hideo TAKEMOTO)
Department of Mathematics
Miyagi University of Education

仙台電波工業高等専門学校
内山　敦　(Atsushi UCHIYAMA)
Department of Mathematics
Sendai National College of Technology

ローマ大学　Laszlo Zsido
Department of Mathematics
University of Rome

序論. 本講演では, n－次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ と n－次元複素ユークリッド空間 $\mathbf{C}^n$ におけるどんな凸部分集合でも σ －凸集合であることに関して講演を行う。

ここで, Uが σ －凸集合であることは

$$U=\left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_j\lambda^{(j)};\ \lambda^{(j)}\in U,\ a_j\geq 0,\ \sum_{j=1}^{\infty} a_j=1\right\}$$

が成立することである。σ －凸集合の概念を我々がどこにも見ることがないが, 武元と内山 [1] は複素数体 $\mathbf{C}$ での任意の有界な凸集合は σ －凸集合であることを示し, それの応用としてヒルベルト空間での作用素の数域に対して通常の数域に関する概念の一般化をおこなった結果を得ている。

<u>**主定理**</u>　n－次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ と n－次元複素ユークリッド空間 $\mathbf{C}^n$ におけるどんな凸部分集合も σ －凸集合である。

上の定理が主とした定理であり, 序論で述べたようにこの結果から, ヒルベルト空間上の作用素の数域に関する従来の概念を空間を考えない抽象的な概念においても考えることができることを示した。

定義 $\mathbf{R}^n$ または $\mathbf{C}^n$ での部分集合Ｕが σ －凸集合であるのはＵが次の条件を満たす事である： Ｕにおける列 $\{\lambda^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ と性質 $a_j \geqq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$ をもつ数列 $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対し元 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{(j)}$ がＵの元となる。

定理 $\mathbf{R}^n$ または $\mathbf{C}^n$ での凸部分集合Ｕに対し，関係式

$$\mathrm{U} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{(j)} ; \lambda^{(j)} \in U, a_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1 \right\}$$

が成立する。

証明 ここではｎ－次元ユークリッド空間に対する証明を与える。たとえ，ｎ－次元複素ユークリッド空間を考えた場合に対しても，ここでのユークリッド空間での証明と類似の証明を考える事で結論を得ることができる。

そこで，ｎ－次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ における任意の有界な凸集合が σ －凸集合であることを示すのであるが，それを次元ｎに関して数学帰納法を用いて示す。

$$\mathrm{V} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{(j)} ; \lambda^{(j)} \in U, a_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1 \right\}$$

とする，そのとき，ＶはＵの閉包 $\bar{\mathrm{U}}$ に含まれている。 λ をＶ－Ｕの元とすると，λ は $\bar{\mathrm{U}}$－Ｕの元である。 Ｕが凸集合であり，λ がＵの元でないことから，次のような超平面Ｈが存在する：

$$\mathrm{H} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n ; \sum_{k=1}^{n} x_k b_k = c \right\}$$

は λ を含み，凸部分集合Ｕは超平面Ｈによってさだめられる半平面の部分に含まれる。ここで $\{x_1, \cdots\cdots, x_n\}$ とｃは実数である。そのとき，我々はは条件 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k = c$ を仮定しても一般性を失わないので，この仮定の下で話しを進める。ただし，$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ である。さらに，次の事柄を仮定しても一般性を失わないので，便

宜のために次の事柄を仮定していく：

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{（すなわち，c = 0）であり U} \subset \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \sum_{k=1}^{n} x_k b_k \leq 0 \right\} \text{である。}$$

n = 1 の場合: n = 1 の場合には λ と各 $\lambda^{(j)}$ は実数である。いま，各 $\lambda^{(j)}$ が負の実数であるならば $a_j \geqq 0$ (j = 1, 2, …) かつ $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$ であるので $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{(j)} < 0 = \lambda$ となる。これは矛盾である。したがって，λ は U の元となる。

n = 2 の場合: 仮定によって，超平面 H は xy-平面 $\mathbf{R}^2$ での直線 L; $b_1x + b_2y = 0$ である。

さらに，直線 L は y-軸 $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ; x = 0 \right\}$ であり，U $\subset \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ; x \leq 0 \right\}$ である。

そこで，$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{(j)}$ *and* $\lambda^{(j)} = \begin{bmatrix} \lambda^{(j)}{}_1 \\ \lambda^{(j)}{}_2 \end{bmatrix}$ とする。そのとき，$\lambda^{(j)}{}_1 \leqq 0$, $a_j \geqq 0$ (j -= 1, 2, …) かつ $\sum_{j=1}^{\infty}$ $a_j = 1$ であるから，$\lambda^{(j)}{}_1 = 0$ (j = 1,2, …)である。これから，$\lambda^{(j)}$ は y-軸上にある。すべての $\lambda^{(j)}$ (j=1,2, …) が U の元であり，U が凸集合かつ λ が U の元でないことより，各 $\lambda^{(j)}$ は y－軸上で λ に関して一方の側にある。これから，われわれは，すべての j に対して $\lambda^{(j)}{}_2 > 0$ であるか，または，すべての j に対して $\lambda^{(j)}{}_2 < 0$ であると仮定してもよい。そこで，我々は次の関係式をもつ：

$$0 = (\text{y-coefficient of } \lambda) = (\text{y-coefficient of } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{(j)}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{(j)}{}_2 \neq 0$$

これは矛盾である。したがって，λ は U の元となる。

n = 1,2, …,k-1 の場合: n $\leqq$ k-1 に対して，$\mathbf{R}^n$ のどんな有界な凸部分集合 U に対して，U

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{(j)} ; \lambda^{(j)} \in U, a_j \geq 0, \sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1 \right\}$$ が成立すると仮定する。

この仮定の下で，

n = k の場合: 我々は超平面 H が$\left\{\begin{bmatrix}0\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix};x_2,\cdots,x_n\in R\right\}$ であると仮定しても一般性を失わない。さらに，我々は次の事柄を仮定しても一般性を失わない：

$$\lambda=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix}\text{かつ}U\subset\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix};x_1\le 0\right\}$$

すると，$\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\lambda=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\lambda^{(j)},\lambda^{(j)}=\begin{bmatrix}\lambda^{(j)}{}_1\\\vdots\\\vdots\\\lambda^{(j)}{}_n\end{bmatrix}\in U, a_j\ge 0\text{かつ}\sum_{j=1}^{\infty}a_j=1.$ となる。

いま，$\lambda_1^{(j)}\le 0, a_j\ge 0\ (j=1,2,\cdots)\text{かつ}\sum_{j=1}^{\infty}a_j=1,$ であるから $\lambda^{(j)}{}_1=0\ (j=1,2,\cdots).$

そこで，W＝U∩H と定義する W は超平面 H（ここでは，H は部分空間となっている）の有界凸部分集合でかつ$\left\{\lambda^{(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}\subset W.$ すると，H の次元は k−1 であることと数学的帰納法の仮定から λ は W の元となる。したがって，λ は U の元となる。以上より，定理の証明が得られる。

参考文献

[1] H. Takemoto and A. Uchiyama, A remark of the numerical ranges of operators on Hilbert spaces, Nihonkai Mathematical Journal, vol. 13 (2002), 1 – 7.